Skizze zum ersten Hilbert-Problem:

Grundlage unserer Überlegungen ist eine abzählbare Anordnung alles Denkbaren. Davon ausgehend wird gezeigt, dass alle Beweise der Existenz überabzählbarer Mengen einen Widerspruch beinhalten. Als ein konkretes Beispiel wird das zweite Diagonalargument von Cantor angeführt und ein Widerspruch in seiner Argumentation nachgewiesen. Damit löst sich auch das erste Hilbert-Problem.

Wir untersuchen zunächst alle möglichen Personen P, welche in irgendeinem möglichen Zeitpunkt T irgend eine Information in Form einer schriftlichen Mitteilung M lesen. Ist eine solche Person P im Zeitpunkt T bereit zu sagen, die Mitteilung M beschreibe "Etwas" eindeutig und widerspruchsfrei, nennen wir dieses Etwas "Objekt des Denkens von P" und bezeichnen es mit "DO(P,T,M)". So wäre etwa der Autor bereit in einem Zeitpunkt, während er diese Arbeit schreibt, zu sagen, die Mitteilung M = "2" beschreibt die natürliche Zahl 2 eindeutig und widerspruchsfrei oder auch die Mitteilung M = "i" beschreibt den Buchstaben i eindeutig und widerspruchsfrei. In anderem Zusammenhang wäre er aber auch bereit zu sagen, die Mitteilung M = "i" beschreibt die Zahl $\sqrt{-1}$. Je nachdem ist dann das Denkobjekt DO(P,T,M) = 2 bzw. DO(P,T,M) = i bzw. DO(P,T,M) = $\sqrt{-1}$.

Um zu der gewünschten abzählbaren Anordnung alles Denkbaren zu kommen führen wir der Reihe nach abzählbare Anordnungen für alle möglichen Personen P, alle möglichen Zeitpunkte T und alle möglichen Mitteilungen M ein.

Jede mögliche Person P muss im Zeitpunkt T des Lesens der Mitteilung M ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnehmen. Der Vorgang des Lesen erfordert eine gewisse Mindestzeit. Es kann angenommen werden, dass beides zusammen ausgedehnt genug ist um mindestens einen Elementarwürfel EW(P,T) im Raum-Zeit-Universum zur Gänze zu enthalten, wenn die räumliche Seitenlänge des Würfels mit 0.01 mm und die zeitliche Dauer mit 0.01 Sek. festgesetzt wird. Nun führen wir im Raum-Zeit-Universum ein vierdimensionales Koordinatensystem ein. In diesem Koordinatensystem können offenbar alle möglichen Elementarwürfel EW(P,T) abzählbar angeordnet werden. Wir bezeichnen diese abzählbare Anordnung mit AO[EW(P,T)] = AO(P,T). Jeder mögliche Lesevorgang einer Person P im Zeitpunkt T hat in dieser abzählbaren Anordnung seinen festen Platz.

Als nächstes ordnen wir alle möglichen Mitteilungen abzählbar an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns auf schriftliche Mitteilungen. Eine "Mitteilung vom Umfang n" sei ein quadratischer Raster, bestehend aus n^2 "Elementarquadraten" der Seitenlänge 1/100 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit a_{jk}. Jede mögliche Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl a(M) = $0.a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Nun fassen wir alle Mitteilungen zuerst in Gruppen nach ihrem Umfang n zusammen, ordnen sie innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) und ordnen sie anschließend in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.

Alle möglichen Denkobjekte DO(P,T,M) können nun wie gewünscht mit Hilfe der Anordnung AO(P,T) in Gruppen und anschließend jeweils mit Hilfe der Anordnung AO(M) in einer Anordnung AO[DO(P,T,M)] abzählbar angeordnet werden.

Als Beispiel betrachten wir RZ(0,1), die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Wir werden zeigen, dass das zweite Diagonalargument von Cantor als Beweis der Überabzählbarkeit von RZ(0,1) einen Widerspruch beinhaltet. Dazu gehen wir von der abzählbaren Anordnung AO[DO(P,T,M)] aus und wählen jene Denkobjekte aus, bei denen P im Zeitpunkt T behauptet, M stelle für ihn eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei dar. Diese Denkobjekte bezeichnen wir mit DO{P[RZ(0,1)],T[RZ(0,1)],M[RZ(0,1)]}. Als Teil der abzählbaren Anordnung AO[DO(P,T,M)] können sie ebenfalls abzählbar angeordnet werden und wir nennen diese abzählbare Anordnung AORZ(P,T,M).

Wir behaupten nun, in der abzählbaren Anordnung AORZ(P,T,M) sind alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthalten. Ein Kritiker unserer Argumentation, nennen wir ihn PK, will die Unvollständigkeit von AORZ(P,T,M) mit Hilfe des zweiten Diagonalarguments von Cantor beweisen. Dazu stellt er jede reelle Zahl r_n aus AORZ(P,T,M) in Form einer unendlichen Dezimalzahl $r_n = 0,r_{n1}r_{n2} \ldots r_{nn} \ldots$ dar und bildet eine Diagonalzahl $d = 0,d_1d_2 \ldots d_n \ldots$ mit der Eigenschaft $\forall k$: $d_k \neq r_{kk}$. Der Kritiker argumentiert, die Diagonalzahl d sei offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, sie unterscheide sich aber jeweils an der n^{ten} Dezimalstelle r_{nn} von r_n. Mithin gelte $\forall n$: $d \neq r_n$ und daher **$d \notin$ AORZ(P,T,M).** Die Anordnung AORZ(P,T,M) enthalte daher nicht alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

PK konnte seine Diagonalzahl d offenbar in die Form einer schriftlichen Mitteilung, nennen wir sie MK, bringen. Ist TK ein Zeitpunkt in dem er seine Kritik äußert, dann stellt das Denkobjekt DO(PK,TK,MK) auf Grund seiner eigenen Aussage die reelle Zahl d zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei dar. Es gilt daher nicht nur $d \in$ AO[DO(P,T,M)] nach Definition von AO[DO(P,T,M)] sondern auch **$d \in$ AORZ(P,T,M)** nach Definition von AORZ(P,T,M). Damit ist der gewünschte Widerspruch nachgewiesen.

Der Irrtum des Kritikers beruht darauf, dass AORZ(P,T,M) nur potenziell vollständig vorliegt. Aktual fehlen **immer** unendlich viele reelle Zahlen. Die Anwendung des zweiten Diagonalarguments auf AORZ(P,T,M) führt zu einem Zirkelschluss. Es kann nur dann funktionieren wenn eine unvollständige Anordnung vorliegt. Nur dann führt es zu einer neuen reellen Zahl zwischen 0 und 1. die vom Kritiker erst zu beweisende Unvollständigkeit wird also implizit bereits vorausgesetzt.